Teoremas de funciones derivables y continuas

Teorema de Rolle

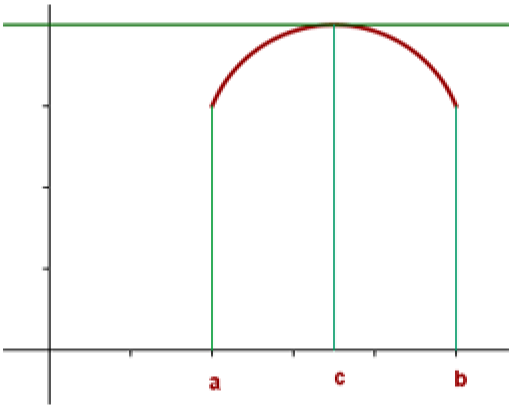
Si una función es:

Continua en [a, b]

Derivable en (a, b)

Y se cumple que **f(a) = f(b)**

Entonces, existe algún punto c ∈(a, b) en el que **f'(c) = 0**.



La **interpretación gráfica del teorema de Rolle** nos dice que hay un punto en el que la tangente es paralela al eje de abscisas.

Ejemplos

1. Estudiar si se verifica el **teorema de Rolle** en el intervalo [0, 3] de la función:

$$f(x) = \begin{cases} 2x & si\ 0 \le x \le 1 \\ -x+3 & si\ 1 < x \le 3 \end{cases}$$

En primer lugar comprobamos que la función es continua en x = 1.

$$f(1) = 2$$

$$\lim_{x \to 1^-} 2x = 2 \qquad \lim_{x \to 1^+} (-x+3) = 2$$

En segundo lugar comprobamos si la función es derivable en x = 1.

$$f'(x) = \begin{cases} 2 & si\ 0 < x \le 1 \\ -1 & si\ 1 < x < 3 \end{cases}$$

$$f'(1^-) \neq f'(3^+)$$

Como las derivadas laterales no coinciden, la función no es derivable en el intervalo (0, 3) y por tanto no se cumple el teorema de Rolle.

2.¿Es aplicable el teorema de Rolle a la función f(x) = ln (5 − x^2) en el intervalo [−2, 2]?

En primer lugar calculamos el dominio de la función.

$5 - x^2 > 0$ $\qquad\qquad$ $D = \left(\sqrt{5}, -\sqrt{5}\right)$

La función es continua en el intervalo [−2, 2] y derivable en (−2, 2), porque los intervalos están contenidos en $\left(\sqrt{5}, -\sqrt{5}\right)$.

Además se cumple que f(−2) = f(2), por tanto es aplicable el teorema de Rolle.

$\dfrac{-2c}{5 - c^2} = 0$ $\qquad\qquad$ $c = 0$

3. Comprobar que la ecuación $x^7 + 3x + 3 = 0$ tiene una única solución real.

La función $f(x) = x^7 + 3x + 3$ es continua y derivable en $\mathbb{R}$.

Teorema de Bolzano.

f(−1) = −1

f(0) = 3

Por tanto la ecuación tiene al menos una solución en el intervalo (−1, 0).

Teorema de Rolle.

$f'(x) = 7x^6 + 3$

Como la derivada no se anula en ningún valor está en contradicción con el **teorema de Rolle**, por tanto sólo tiene una raíz real.

Teorema de Lagrange o del valor medio

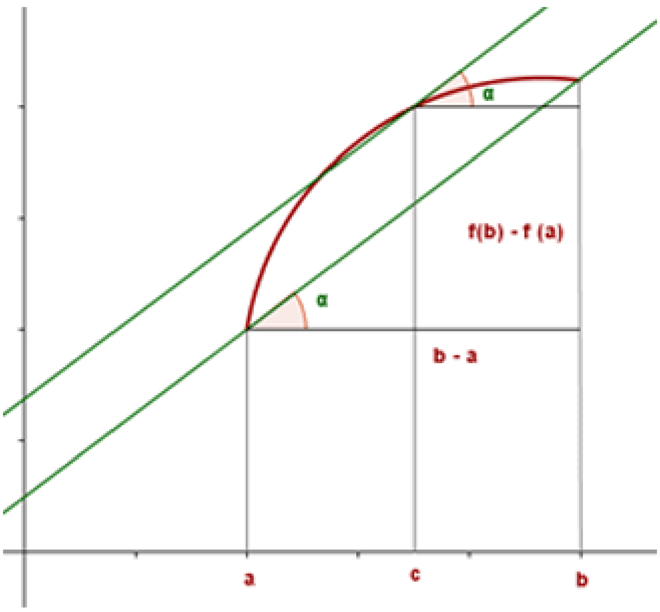
Si una función es:

Continua en [a, b]

Derivable en (a, b)

Entonces, existe algún punto c ∈ (a, b) tal que:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$



La interpretación geométrica del **teorema de Lagrange** nos dice que hay un punto en el que la tangente es paralela a la secante.

El teorema de Rolle es un caso particular del **teorema de Lagrange**, en el que **f(a) = f(b)**.

Ejemplo

¿Se puede aplicar el **teorema de Lagrange** a f(x) = x^3 en [−1, 2]?

f(x) es continua en [−1, 2] y derivable en (−1, 2) por tanto se puede aplicar el **teorema del valor medio**:

$$\frac{8-(-1)}{2-(-1)} = f'(c) \qquad f'(c) = 3 \qquad 3c^2 = 3$$

$$c = 1 \in (-1, 2) \qquad c = -1 \notin (-1, 2)$$

Teorema de Cauchy

Si f y g son funciones continuas en [a, b] y derivables en (a, b), existe un punto c ∈(a, b) tal que:

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \qquad \begin{matrix} g(b)-g(a) \neq 0 \\ g'(c) \neq 0 \end{matrix}$$

El valor del primer miembro es constante:

$$k = \frac{f'(c)}{g'(c)} \qquad f'(c) = k\,g'(c)$$

La interpretación geométrica del teorema de Cauchy nos dice que existen dos puntos (c, f(c)) y (c, g(c)) de las curvas f(x) y g(x), tales que la pendiente de la tangente a la curva f(x) en el primer punto es k veces la pendiente de la tangente a la curva g(x) en el segundo punto.

Al teorema de Cauchy también se le suele denominar **teorema del valor medio generalizado**.

Ejemplo

Comprobar si se cumplen las hipótesis del **teorema de Cauchy** para las funciones f(x) = x^3 y g(x) = x + 3 en el intervalo [0, 2].

Las funciones f(x) y g(x) son continuas en el intervalo [0, 2] y derivables en (0, 2), por ser funciones polinómicas.

Y además g(0) ≠ g(2).

$$\frac{1-1}{1+1} = \frac{2c}{3c^2} \qquad c = 0$$

Como g' (0) = 0 no se puede aplicar el **teorema de Cauchy**.

Regla de L'Hôpital

Si $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$, en donde f y g son derivables en un **entorno** de *a* y

Existe $\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$, este límite coincide con $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$

Es $$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$ decir:

Para aplicar la regla de L'Hôpital hay que tener un límite de la forma , $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ donde *a* puede ser un número o infinito, y aparecer las indeterminaciones:

$$\frac{0}{0} \qquad \frac{\infty}{\infty}$$

Ejemplos

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln(2x^2-1)}{\operatorname{tg}(x-1)}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln(2x^2-1)}{\operatorname{tg}(x-1)}=\frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln(2x^2-1)}{\operatorname{tg}(x-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{4x}{2x^2-1}}{1+\operatorname{tg}^2(x-1)}=4$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\operatorname{sen}x}{x^3}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\operatorname{sen}x}{x^3}=\frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\operatorname{sen}x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}x}{6x}=\frac{1}{6}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{1-\cos(x-1)}{(\ln x)^2}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{1-\cos(x-1)}{(\ln x)^2}=\frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{1-\cos(x-1)}{(\ln x)^2}=\lim_{x\to 1}\frac{\operatorname{sen}(x-1)}{\frac{2\ln x}{x}}=\lim_{x\to 1}\frac{\cos(x-1)}{\frac{2-2\ln x}{x^2}}=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos^2 x - 1}{x^2}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos^2 x - 1}{x^2} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos^2 x - 1}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{-2\cos x \operatorname{sen} x}{2x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \left(\operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x\right) = -1$$

Indeterminación infinito menos infinito

En la indeterminación **infinito menos infinito**, si son fracciones, se operan con común denominador.

Ejemplo:

$$\lim_{x\to 0} \left(\cot g\, x - \frac{1}{x}\right)$$

$$\lim_{x\to 0} \left(\cot g\, x - \frac{1}{x}\right) = \infty - \infty$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\cos x - \operatorname{sen} x}{x \operatorname{sen} x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - x\operatorname{sen} x - \cos x}{\operatorname{sen} x + x\cos x} =$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{-x\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x + x\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{-\operatorname{sen} x - x\cos x}{\cos x + \cos x + x\operatorname{sen} x} = \frac{0}{2} = 0$$

Indeterminación cero por infinito

La indeterminación cero por infinito, se transforma del siguiente modo:

$$\lim_{x\to a} A\cdot B = \lim_{x\to a} \frac{A}{\frac{1}{B}}$$

Ejemplo:

$$\lim_{x\to 0^+} (x \ln x)$$

$$\lim_{x\to 0^+} (x \ln x) = 0\cdot(-\infty)$$

$$\lim_{x\to 0^+}(x\ln x) = \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \frac{\infty}{\infty}$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+} -x = 0$$

Indeterminaciones 0^0 ∞^0 1^∞

En las sin determinaciones cero elevado cero, infinito elevado a cero y uno elevado a infinito; se realiza en primer lugar las siguientes operaciones:

$$\lim_{x\to a} u^v \qquad A = u^v$$

$$\ln A = \ln u^v \qquad \ln A = v\ln u \qquad A = e^{v\ln u}$$

$$\lim_{x\to a} e^{v\ln u} = e^{\lim\limits_{x\to a}(v\ln u)}$$

Ejemplos

$$\lim_{x\to 0^+}(2x)^{\frac{1}{x}}$$

$$\lim_{x\to 0^+}(2x)^{\frac{1}{x}} = 0^{\frac{1}{\infty}} = 0^0$$

$$A = (2x)^{\frac{1}{x}} \qquad \ln A = \frac{1}{x}\ln(2x) \qquad A = e^{\frac{1}{x}\ln(2x)}$$

$$\lim_{x\to 0^+}(2x)^{\frac{1}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{x}\ln(2x)} = e^{-\infty} = \frac{1}{e^\infty} = 0$$

$$\lim_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{3}{x^2}}$$

$$\lim_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{3}{x^2}} = 1^\infty$$

$$A = (\cos 2x)^{\frac{3}{x^2}} \qquad \ln A = \frac{3}{x^2}\ln(\cos 2x)$$

$$A = e^{\frac{3\ln(\cos 2x)}{x^2}}$$

$$\lim_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{3}{x^2}} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{3\ln(\cos 2x)}{x^2}} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{3\frac{-2\operatorname{sen}2x}{\cos 2x}}{2x}} =$$

$$= \lim_{x\to 0} e^{\frac{-6\operatorname{tg}2x}{2x}} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{-12(1+\operatorname{tg}^2 2x)}{2}} = e^{-6}$$

$$\lim_{x\to 0}(\operatorname{cotg} x)^{\operatorname{sen} x} = \infty^0$$

$$A = (\operatorname{cotg} x)^{\operatorname{sen} x} \qquad \ln A = \operatorname{sen} x \ln(\operatorname{cotg} x)$$

$$A = e^{\operatorname{sen} x \ln(\operatorname{cotg} x)}$$

$$\lim_{x\to 0}(\operatorname{cotg} x)^{\operatorname{sen} x} = \lim_{x\to 0} e^{\operatorname{sen} x \ln(\operatorname{cotg} x)} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(\operatorname{cotg} x)}{\operatorname{cosec} x}} =$$

$$e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{-\operatorname{cosec}^2 x}{\operatorname{cotg} x}}{\frac{-\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{cosec}^2 x \operatorname{sen}^2 x}{\cos x \operatorname{cotg} x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\cos x \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x}} = e^0 = 1$$